REUNI – REVISTA UNIJALES / EDIÇÃO 1 / Nº 1 / ANO I / 2006
ISSN 1980-8925 (versão eletrônica)
http://www.reuni.pro.br

UM ESTUDO DE FUNÇÕES ENVOLVENDO RAÍZES NÃO REAIS

Flávia Sueli Fabiani Marcatto

Resumo: Este artigo pretende apresentar uma atividade que pode ser trabalhada em sala de aula visando o estudo de raízes não reais, com compreensão e significado, ao iniciar o Ensino Médio. A atividade em questão é parte de um trabalho maior desenvolvido na dissertação de mestrado com o título: Números Complexos via Resolução de Problemas. Neste trabalho, é proposto iniciar o significado de números irreais ou imaginários desde a 8ª série do Ensino Fundamental.

Palavras-Chave: funções, raízes reais, raízes não reais, números complexos.

Na 1ª série do Ensino Médio, faz parte do currículo dos alunos o estudo de funções do 1º e 2º graus. Proponho aqui, nesta fase, a título de introduzir os alunos aos números complexos, um trabalho sobre as funções e seus gráficos.

As primeiras noções de função devem ser introduzidas a partir de situações que têm significado para o aluno. As funções são muito importantes na Matemática, na Física, na Biologia, na Economia. Os gráficos de funções são muito utilizados. Eles aparecem nos jornais e revistas, nos relatórios de empresas.

No livro didático, Matemática, 8ª série, de Imenes e Lellis de 1997, os autores apresentam o estudo de funções nesta série. Eles iniciam o trabalho familiarizando os alunos com o significado de funções, construindo tabelas e utilizando suas equações. As funções são vistas como uma relação entre duas grandezas variáveis e tentam mostrar, através de exemplos, chamados por eles de recursos, o que significa dizer *y é função de x*. Em seguida,

fazem uma análise do gráfico da função apresentando o plano cartesiano e construindo a tabela da função. Aqui os alunos têm o primeiro contato com pares ordenados. Eles aprendem a fazer o gráfico da função do 2º grau, marcando os pares ordenados no plano cartesiano e, assim, dar a forma de uma curva.

O interessante deste trabalho, com as funções, que Imenes e Lellis fazem, é que eles proporcionam aos alunos o contato com várias representações: a fórmula (representação algébrica), a tabela, o par ordenado e o gráfico (representação geométrica).

Vejamos uma aplicação que é possível ser trabalhada com os alunos da 1ª série do Ensino Médio, com relação às raízes de uma equação do 2º grau. Este trabalho pode ser feito sem que seja preciso falar em imagem da função e domínio da função. Isto pode ficar para mais tarde, quando os alunos estiverem mais amadurecidos para estas idéias. É imprescindível que os alunos manipulem várias situações para as equações do 2º grau, a fim de perceber importantes relações com seus respectivos gráficos.

Seja $y = ax^2 + bx + c$ uma equação do 2º grau, com $D = b^2 - 4ac < 0$.

O gráfico desta equação é uma parábola com $V = \left(x_V = -\dfrac{b}{2a}, y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} \right)$.

Ao criarmos uma nova equação onde $Y = y - 2y_v$ e fazendo as devidas substituições, teríamos:

$$Y = ax^2 + bx + c - 2y_v$$

$$Y = ax^2 + bx + c - 2\left(-\frac{\Delta}{4a} \right)$$

$$Y = ax^2 + bx + \left(c + \frac{\Delta}{2a} \right)$$

O discriminante Δ' para Y é:

$$\Delta' = b^2 - 4a\left(c + \frac{\Delta}{2a} \right)$$

$$\Delta' = b^2 - 4ac - \frac{4a\Delta}{2a}, \quad \text{onde} \quad D = b^2 - 4ac$$

$$\Delta' = b^2 - 4ac - 2(b^2 - 4ac)$$

$$\Delta' = b^2 - 4ac - 2b^2 + 8ac$$

$$\Delta' = -b^2 + 4ac$$

$$\Delta' = -(b^2 - 4ac)$$

\ $\Delta' = -\Delta$

Assim, as raízes de Y são:

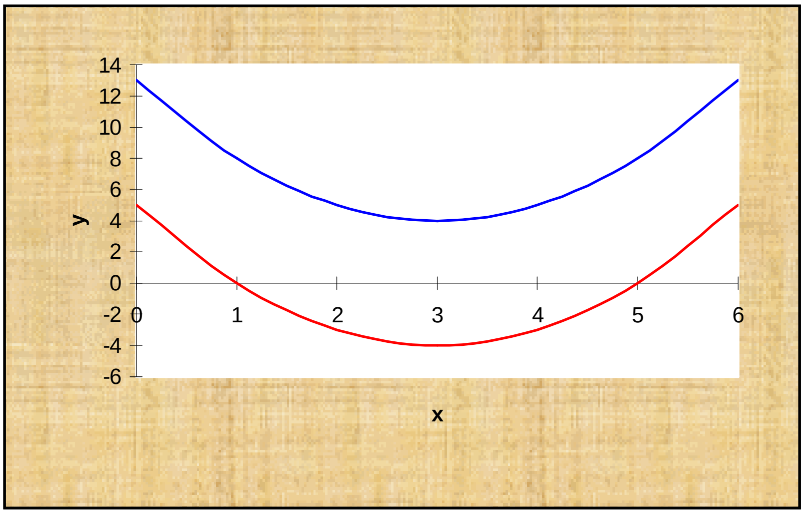
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta'}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta'}}{2a}$$

Como $\Delta < 0$ e $\Delta' = -\Delta$, $\Delta' > 0$ e, portanto, Y terá duas raízes reais e distintas.

Vejamos, como ilustração gráfica, um exemplo:

Seja (1) $y = x^2 - 6x + 13$ com raízes complexas $3 + 2i$ e $3 - 2i$, cujo gráfico está ilustrado em vermelho. Aqui não serão apresentados aos alunos as raízes complexas. O que tem que ficar claro para os alunos é que há solução e que elas são raízes não reais.

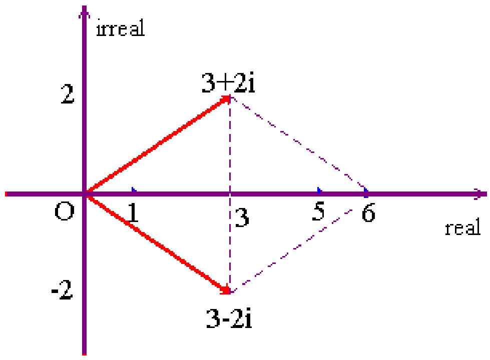
Passando de (1) para (2) $Y = x^2 - 6x + 5$, ao fazer $Y = y - 2y_v$, esta função apresenta raízes reais $x_1 = 1$ e $x_2 = 5$, cujo gráfico está ilustrado em vermelho.



Fazendo este tipo de estudo, os alunos poderão perceber que o gráfico da função quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo x e que passa pelo vértice. Os pontos da reta, perpendicular ao eixo x e que passa pelo vértice da parábola, obedecem a equação $x = \frac{-b}{2a}$ (x_V). O x do vértice é o ponto médio da distância entre as raízes.

Analisando o gráfico acima, o professor poderia dar continuidade a este trabalho, Fazendo $c' = 13 - 8 = 5$, o gráfico da função (1) sofre uma translação que provoca uma mudança no ponto de interseção de Y com Oy e, em conseqüência, ao abaixar o gráfico obtemos para Y duas raízes reais e desiguais.

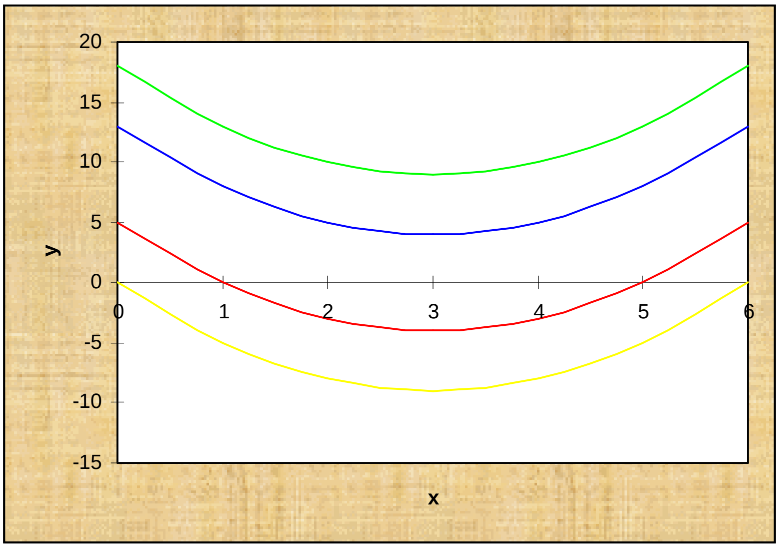
Representando as raízes das funções y *e* Y por seus pares ordenados (vetores), aproveitando aqui a Física que os alunos começam a estudar nesta etapa, respectivamente, no plano Argand-Gauss por $3 + 2i = (3, 2)$, $3 - 2i = (3, -2)$ e $(1, 0)$, $(5, 0)$ e, usando a regra do paralelogramo, poderíamos observar que a soma das raízes de Y é $6 = 1 + 5$ e de y é $6 = (3+2i)+(3-2i)$.



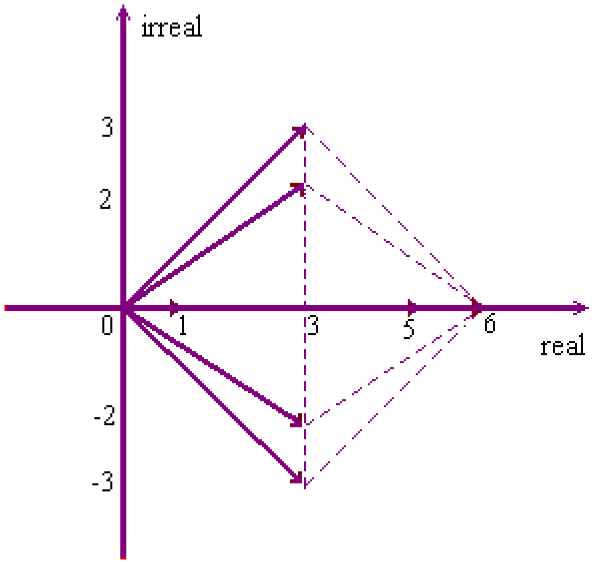
Isto poderia permitir que um trabalho feito no campo complexo fosse executado no campo real com mais facilidade.

Fazendo mais um exemplo $y_1 = x^2 - 6x + 18$ com raízes complexas $3 + 3i$ e $3 - 3i$, no gráfico ilustrado pela cor verde.

A nova função $Y_1 = x^2 - 6x$ apresenta raízes reais $x_1 = 0$ e $x_2 = 6$, ilustrado pela cor amarela.



Representando as raízes das funções acima, através de composição vetorial, temos



Nos exemplos que vimos acima, a cada número diferente de vezes de y_V que tiramos da equação original, a parábola vai descendo até que, ao tirarmos $2y_V$, encontramos duas raízes reais e distintas que, adicionadas, resultam sempre no mesmo valor. As raízes da equação original são complexas e simétricas e, quando adicionadas, também dão o mesmo valor. Quando acrescentamos y_V à equação original, o gráfico se distancia cada vez mais do eixo x e as raízes destas equações geradas são sempre simétricas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

EMBSE, C. V. Graphing Powers and Roots of Complex Numbers. The Mathematics Teacher. Vol. 86, no.7, october 1993, p.589-597.

FABIANI, F.S. Números Complexos via Resolução de Problemas. Rio Claro: UNESP, 1998. 210 p. Dissertação (Mestrado em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos) – IGCE, UNESP, 1998.

KLEINER, I. Thinking the Unthinkable: The Story of Complex Numbers (with a Moral). The Mathematics Theacher. Vol. 81, number 7, p. 583-592, october 1988.

Profa. Flávia Sueli Fabiani Marcatto
e-mail: marcatto@terra.com.br
UNIJALES – Centro Universitário de Jales – Unidade Central
Fone (17) 3622-1620
Av. Francisco Jalles, n.º 1.851
CEP: 15700-000
Jales - SP